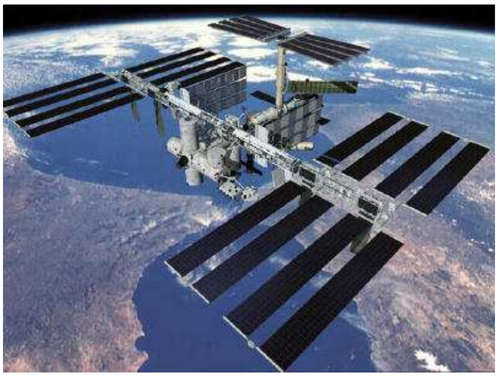
AMÉRIQUE DU NORD 2013 – EX 2

La station spatiale ISS (6,5 pts)

La station spatiale internationale ISS (International Space Station) est à ce jour le plus grand des objets artificiels placés en orbite terrestre à une altitude de 400 km.
Elle est occupée en permanence par un équipage international qui se consacre à la recherche scientifique dans l'environnement spatial.
Jusqu'à présent, trois vaisseaux cargos ATV ont permis de ravitailler la station ISS.



Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

1. Étude du mouvement de la station spatiale ISS

La station spatiale internationale, supposée ponctuelle et notée S, évolue sur une orbite qu'on admettra circulaire, dont le plan est incliné de 51,6° par rapport au plan de l'équateur. Son altitude est environ égale à 400 km.

Données

- Rayon de la Terre : R = 6380 km
- Masse de la station : m = 435 tonnes
- Masse de la Terre, supposée ponctuelle : $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
- Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Altitude de la station ISS : h = 400 km
- Expression de la valeur de la force d'interaction gravitationnelle F entre deux corps A et B ponctuels de masses respectives m_A et m_B, distants de d = AB :

$$F = \frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{d^2}$$

1. Représenter sur un schéma :

- la Terre et la station S, supposée ponctuelle ;
- un vecteur unitaire $\vec{u}$ orienté de la station S vers la Terre T ;
- la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur la station.

Donner l'expression vectorielle de cette force en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}$.

2. En considérant la seule action de la Terre, établir l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}_S$ de la station dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, en fonction de G, M, h, R et du vecteur unitaire $\vec{u}$.

3.1. Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, la valeur de la vitesse de la station a pour expression : $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{R + h}}$

3.2. Calculer la valeur de la vitesse de la station en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4. Combien de révolutions autour de la Terre un astronaute présent à bord de la station spatiale internationale fait-il en 24 h ?

2. Ravitaillement de la station ISS

Le 23 mars 2012, un lanceur Ariane 5 a décollé du port spatial de l'Europe à Kourou (Guyane), emportant à son bord le véhicule de transfert automatique (ATV) qui permet de ravitailler la Station Spatiale Internationale (ISS).

Au moment du décollage, la masse de la fusée est égale à $7{,}8 \cdot 10^2$ tonnes, dont environ 3,5 tonnes de cargaison : ergols, oxygène, air, eau potable, équipements scientifiques, vivres et vêtements pour l'équipage à bord de l'ATV.

On se propose dans cette partie d'étudier le décollage de la fusée.

Pour ce faire, on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. À la date t = 0 s, le système est immobile.

À la date t = 1 s, la fusée a éjecté une masse de gaz notée m_g, à la vitesse $\vec{v}_g$. Sa masse est alors notée m_f et sa vitesse $\vec{v}_f$

Données

- Intensité de la pesanteur à Kourou : $g = 9{,}78\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Débit d'éjection des gaz au décollage : $D = 2{,}9 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
- Vitesse d'éjection des gaz au décollage : $v_g = 4{,}0\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$

Modèle simplifié du décollage

Dans ce modèle simplifié, on suppose que le système {fusée + gaz} est isolé.

1.1. En comparant la quantité de mouvement du système considéré aux dates t = 0 s et t = 1 s montrer que :

$$\vec{v}_f = -\frac{m_g}{m_f}\vec{v}_g$$

Quelle est la conséquence de l'éjection de ces gaz sur le mouvement de la fusée ?

1.2. Après avoir montré numériquement que la variation de la masse de la fusée est négligeable au bout d'une seconde après le décollage, calculer la valeur de la vitesse de la fusée à cet instant.

Étude plus réaliste du décollage

2.1. En réalité la vitesse $\vec{v}_f$ est très inférieure à celle calculée à la question 1.2. En supposant que le système {fusée + gaz) est isolé, quelle force a-t-on négligée alors qu'elle n'était pas négligeable ?

2.2. On considère désormais le système {fusée}. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la force de poussée $\vec{F}$ définie par $\vec{F} = -D \cdot \vec{v}_g$ où D est la masse de gaz éjecté par seconde.

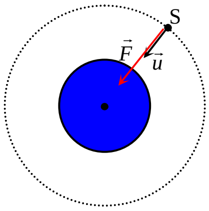
2.2.1. Montrer que le produit $D \cdot v_g$ est homogène à une force.

2.2.2. Vérifier par une application numérique que la fusée peut effectivement décoller.

Correction

1. Étude du mouvement de la station spatiale ISS

1. Schéma de la terre et de la station spatiale **[0,75 pt]**



$$\vec{F} = \frac{G \cdot m \cdot M}{(R+h)^2} \cdot \vec{u}$$

2. La seule force qui s'applique à la station est l'action de la terre (énoncé). Donc, d'après la RFD, l'accélération $\vec{a}_S$ de la station est donnée par : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}_S$. On en déduit : **[0,75 pt]**

$$\vec{a}_S = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2} \cdot \vec{u}$$

3.1. Le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur unitaire normal du repère de Frenet. On sait que, dans un tel repère, l'accélération est liée à la vitesse par la relation $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t + \frac{v^2}{(R+h)^2}\vec{u}$, R étant ici le rayon de courbure de la trajectoire (cours). Par identification, on en déduit que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et que

$$\frac{v^2}{R+h} = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}}$$

[1 pt]

3.2. v = 7,67 km·s^{-1} **[0,25 pt]**

-0,125 pour chiffres significatifs absurdes

4. Le rayon de la trajectoire est $R+h$, donc le périmètre de l'orbite vaut $d = 2\pi(R+h) = 42{,}6 \cdot 10^3$ km. À cette vitesse, il faut $T = d / v = 5{,}55 \cdot 10^3$ s pour faire une révolution, soit 15,8 révolutions par 24h **[0,5 pt]**

2. Ravitaillement de la station ISS

1.1. À t = 0, la quantité de mouvement $\vec{p}_0$ est nulle. À t = 1s, la quantité de mouvement du système vaut $\vec{p}_1 = m_f \cdot \vec{v}_f + m_g \cdot \vec{v}_g = \vec{0}$ en vertu de la conservation de quantité de mouvement d'un système isolé.

On en déduit : $\vec{v}_f = -\frac{m_g}{m_f}\vec{v}_g$

L'éjection des gaz va causer une poussée sur la fusée, lui permettant de décoller. **[1 pt]**

0,25 pt pour la quantité de mouvement initiale

0,25 pt pour effet sur le mouvement de la fusée

1.2. La 1ère seconde, la fusée a perdu 2,9 t de gaz, ce qui est négligeable devant les 780 t de sa masse initiale (0,4%).

On calcule v_f = 15 m·s^{-1} **[0,5 pt]**

-0,125 si pas de calcul des 0,4%

2.1. On a négligé le poids de la fusée !!! **[0,5 pt]**

2.2.1. $[D \cdot v_g]$ = M·T^{-1}×L·T^{-1} = M·L·T^{-2}. Une force a les mêmes unité qu'une masse × accélération soit M·L·T^{-2}. Donc le produit $D \cdot v_g$ est homogène à une force. **[0,5 pt]**

0,25 pt pour unités de $D \cdot v_g$

2.2.2. La fusée peut décoller si la force F est supérieure au poids de la fusée : $F = 12 \cdot 10^6$ N et $P = 7{,}7 \cdot 10^6$ N. La fusée peut décoller. **[0,75 pt]**