# AMÉRIQUE DU SUD 2014 - EX.1

## Un peu de balistique (8 pts)

Lors de fouilles préventives sur un chantier de travaux publics, on a retrouvé ce qui ressemble à une arme à feu. Il s'agit d'un ancien pistolet lance-fusées en bronze datant probablement de la première Guerre Mondiale. Il est dans un état de conservation assez remarquable.

Ce type de pistolet était très utilisé lors de cette guerre car, en plus de lancer des fusées éclairantes, il pouvait servir de moyen de communication. En effet, à l'époque très peu de moyens étaient mis à disposition des troupes : les ondes hertziennes étaient très peu utilisées et c'étaient des kilomètres de câbles téléphoniques qui devaient être déroulés pour permettre la transmission de messages divers et variés. Ainsi les pistolets signaleurs se sont avérés très utiles.

### *1. Durée de visibilité de la fusée*

Sur la notice des fusées éclairantes que l'on peut utiliser dans ce type de pistolet, on trouve les informations suivantes :

> Cartouche qui lance une fusée éclairante s'allumant 1,0 seconde après son départ du pistolet et éclaire d'une façon intense pendant 6 secondes environ.
>
> Masse de la fusée éclairante : $m_f = 58$ g.

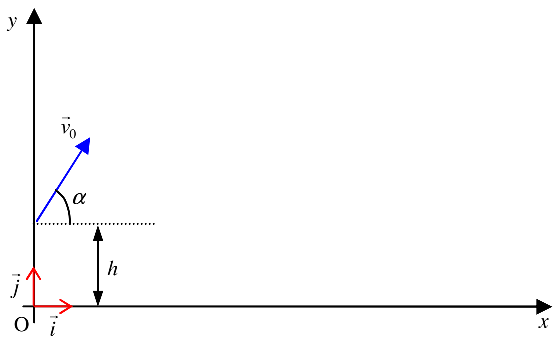
On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Le champ de pesanteur terrestre est considéré uniforme, de valeur $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

On négligera toutes les actions dues à l'air ainsi que la perte de masse de la fusée pendant qu'elle brille et on considèrera cette dernière comme un objet ponctuel.

On définit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec O au niveau du sol et tel que la position initiale de la fusée éclairante à la sortie du pistolet soit à une hauteur $h = 1{,}8$ m. Le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ est dans le plan (O, $x$, $y$) ; O$x$ est horizontal et O$y$ est vertical et orienté vers le haut.

À l'instant $t = 0$ s, le vecteur vitesse de la fusée éclairante fait un angle $\alpha$ égal à 55 ° avec l'axe O$x$ et sa valeur est $v_0 = 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On pourra se référer au schéma ci-dessous.




**1.1.** Représenter le vecteur champ de pesanteur sur le schéma ci-dessus et tracer qualitativement l'allure de la trajectoire suivie par la fusée éclairante dans ce champ de pesanteur.

**1.2.** En utilisant une loi de Newton que l'on énoncera, déterminer les coordonnées du vecteur accélération de la fusée éclairante : $a_x(t)$ suivant $x$ et $a_y(t)$ suivant $y$.

**1.3.** En déduire les expressions des coordonnées $v_x(t)$et $v_y(t)$ du vecteur vitesse de la fusée éclairante et montrer que les équations horaires du mouvement de la fusée s'écrivent $x(t) = v_0\cdot\cos(\alpha)\cdot t$ et $y(t) = -g/2\cdot t^2 + v_0\cdot\sin(\alpha)\cdot t + h$, avec $t$ en seconde, $v_0$ en mètre par seconde et $x(t)$, $y(t)$ et $h$ en mètre.

**1.4.** Déterminer la valeur de la durée du vol de la fusée éclairante.

On rappelle qu'une équation du second degré de la forme $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ admet deux solutions $x_1 = \dfrac{b^2 - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{b^2 + \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$ est positif.

**1.5.** Calculer l'altitude à partir de laquelle la fusée commence à éclairer puis l'altitude à laquelle elle s'arrête. Ces valeurs paraissent-elles adaptées au but recherché ?

### *2. Pour aller un peu plus loin*

Par souci de simplification, on ne considère que le système {fusée – pistolet} et on s'intéresse à sa quantité de mouvement. La masse du pistolet à vide est $m_p = 0{,}98$ kg.

**2.1.** Exprimer la quantité de mouvement totale $\vec{p}_0$ du système {fusée – pistolet} avant que la fusée ne quitte le pistolet puis montrer que celle-ci est équivalente au vecteur nul.

**Éjection de la fusée**

**2.2.1.** Que peut-on dire de la quantité de mouvement totale du système {fusée – pistolet} si l'on considère ce système comme un système isolé au cours de l'éjection de la fusée du pistolet ?

**2.2.2.** En déduire dans ce cas l'expression vectorielle de la vitesse $\vec{v}_p$ de recul du pistolet juste après l'éjection de la fusée en fonction de la masse du pistolet $m_p$, de la masse de la fusée $m_f$ et du vecteur vitesse initiale de la fusée $\vec{v}_0$.

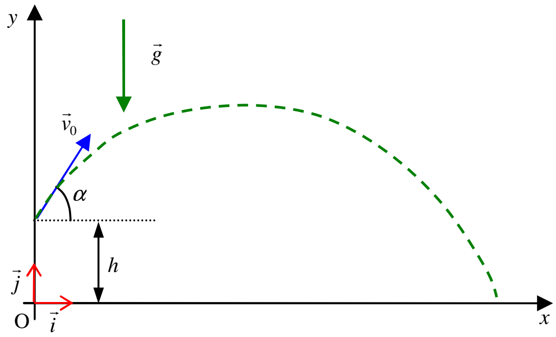
**2.2.3.** La valeur réelle de la vitesse est beaucoup plus faible que la valeur que l'on obtient à la question précédente. Pourquoi observe-t-on une telle différence ? Justifier la réponse.

# Correction

## 1. Durée de visibilité de la fusée

**1.1** Le vecteur champ de pesanteur ($g$) est vertical et vers le bas. Peu importe où l'on place ce vecteur, puisqu'il s'agit d'un champ *uniforme*.

Pour ce qui est de la trajectoire, il faut tracer une trajectoire parabolique tangente à $\vec{v}_0$ au point de départ. Le terme *qualitatif* veut dire qu'on ne s'intéresse qu'à l'allure de la trajectoire.




**1.2.** Il s'agit de la RFD, ou deuxième loi de Newton qui s'énonce : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$

Ici, la somme des forces se résume au poids, donc :
sur l'axe O$x$ : $P_x = m \cdot a_x \rightarrow a_x = 0$
sur l'axe O$y$ : $P_y = m \cdot a_y \rightarrow a_y = P_y / m = -g$.

**1.3.** Pour obtenir $\vec{v}$, il faut intégrer $\vec{a}$. On obtient donc :
$v_x = k_1$, or à $t = 0$, on a $v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$, donc $k_1 = v_0 \cdot \cos\alpha$
$v_y = -g \cdot t + k_2$, or à $t = 0$, on a $v_y = v_0 \cdot \sin\alpha$, donc $k_2 = v_0 \cdot \sin\alpha$

Pour obtenir les équations horaires du mouvement, on doit intégrer $\vec{v}$
$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + k_3$, or à $t = 0$, on a $x(0) = 0$, donc $k_3 = 0$
$y(t) = -0{,}5 \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + k_4$, or à $t = 0$, on a $y(0) = k$, donc $k_4 = h$

On obtient donc bien les équations proposées dans l'énoncé.

**1.4.** La durée de vol est le temps nécessaire pour que la coordonnée $y(t)$ de la fusée soit égale à 0.

Cela revient à résoudre : $-g/2 \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + h = 0$
On trouve $\Delta \cong 1712{,}8$ et les deux racines sont $-0{,}044$ s et $8{,}40$ s.
La fusée retombe donc au sol au bout de 8,40 s.

**1.5.** La fusée commence à éclairer au bout de 1 s soit $y \cong 38$ m et éclaire jusqu'à $t = 7$ s soit $y \cong 48$ m.
L'objectif de la fusée éclairante étant d'être vue de loin, ces valeurs semblent adaptées.

## 2. Pour aller un peu plus loin

**2.1.** $\vec{p}_0 = \vec{p}_{\text{fusée}} + \vec{p}_{\text{pistolet}}$. La fusée et le pistolet étant initialement immobile, ces quantités de mouvement sont nulles.

**2.2.1.** Ce système est fermé (ni le pistolet, ni la fusée ne perd de masse, si on néglige les réactifs éjectés lors de la combustion) et isolé (l'énoncé l'affirme), donc la quantité de mouvement se conserve.

**2.2.2.** D'après les réponses précédentes, on peut écrire que, après le tir :

$$m_p \cdot \vec{v}_p + m_f \cdot \vec{v}_0 = \vec{0}$$

En isolant $\vec{v}_p$, on obtient : $\vec{v}_p = -\dfrac{m_f \cdot \vec{v}_0}{m_p}$

**2.2.3.** Plusieurs réponses sont possibles. D'abord le système n'est pas vraiment isolé : au moment du tir, le tireur modifie la force qu'il applique au pistolet pour limiter le recul.
De plus le système n'est pas vraiment fermé. En effet, un quantité non négligeable de gaz est ejectée par la fusée lors du tir.